非線形モデルによる自励振動のシミュレーション
Pythonによるファン・デル・ポール方程式の位相平面解析

Simulation of Self−Excited Oscillation based on Nonlinear Model
Phase Plane Analysis of Van der Pol Equation through Python

大野邦夫 †
Kunio OHNO †

† 株式会社モナビITコンサルティング　† Monavis IT Consulting Co. LTD.
Email: k−ohno@star.ocn.ne.jp

1. はじめに

先の報告[1]で, 微分方程式により記述される系の解を , 多次元ベクトル空間における状態点のトラジェエクトリで示す手法を説明した．さらにその具体的事例として二階の線形微分方程式の一般的な系として知られる減衰振動系を取り上げ, Pythonプログラミングにより位相平面上のトラジェエクトリとして表示する手法を紹介した .

そのような手法を紹介する背景として， デジタルミュージアムの特徴である動的な可視化を通じた展示の可能性が挙げられる[2]．例えば地磁気逆転現象などは地球外核の電磁流体に対する力学,電磁気学,流体力学,熱力学などを連立させて解く必要があるが,多元連立非線形微分方程式を解くことになる[3].

本報告は, 減衰振動系の応用として , 減衰項が非線形特性を有するファン・デル・ポール（Van der Pol）方程式を取り上げて，Pythonによる解法とシミュレーション手法を紹介しつつ, 自励振動のメカニズムを紹介し , その概念の応用に関して考察する.

2. 自励振動モデル

減衰振動系は, 減衰項の係数が正で, その項がエネルギの散逸を生じることから振幅が減少するが， 減衰項の係数が負の場合は逆に振幅が増大する . このような負の減衰項は, 負性抵抗と呼ばれ， 電気回路などでは増幅機能に関係付けられることが知られている.

負性抵抗と言えども振幅が無限に拡大することはあり得ないので, 振幅が大きくなると正抵抗になるはずである . そうでなければエネルギ的に不安定で現実的ではない． 無次元で標準化された減衰振動の微分方程式は , 下記のようになる[1].

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varsigma\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad \cdots\cdots\cdot (1)$$

減衰項の係数の2ζを，$\mu(x^2 - 1)$ とすると, x が1より小さい場合には負になり , 1より大きい場合は正となる . すなわち，

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad \cdots\cdot (2)$$

(2)式がファン・デル・ポール方程式の標準形である．微分方程式の数値解法としては， 計算精度の点ではルンゲクッタ方が一般的であるが, シミュレーションの観点では, 原理的なモデルであるオイラー法が適切である .

基本的手法としては高階微分方程式を一階の連立微分方程式とし, 初期値から出発して微小時間毎に逐次計算を進める . 連立微分方程式の変数の数をNとすると, その解はN次元ベクトル空間（状態空間）における位置（状態点）の推移の軌跡となり, それはトラジェクトリと呼ばれる . それは与えられた初期値の状態点から， その値に基づいて計算される微小時間dt後の位置に推移する．次にその位置の状態点の値で dt 時間後を計算し次の位置に移動する． このプロセスを繰り返すことにより解が得られる .

3. Pythonプログラム

状態空間は位相空間とも呼ばれ， 二次元の位相空間は位相平面と呼ばれる．位相平面上で解析するために (2)式の二階微分方程式を連立一階微分方程式に書き換える .

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} - x \quad \cdots\cdots (4)$$

このプロセスを，Pythonプログラムで記述すると下記のようになる.

```
#−−−−−−Pythonプログラム−−−−−−−
def van_der_pol(n):
    # 初期値設定
    x = u[0] #xの値はリスト u に格納
    y = v[0] #yの値はリスト v に格納
```

```
    mu = 0.1 # μ=0.1の場合
    s = w[0] #時間tの値はsとしてリストwに格納
    dx =0.0
    dy =0.0
    ds =0.01   #dt
    i = 1
    while i < n :
        #繰り返し演算
        dx = y * ds   # (3)式
        dy = −(x + mu * ( x * x − 1) * y) * ds #(4)式
        x = x + dx
        y = y + dy
        u.append(x)   #xの値はリスト u に逐次追加する
        v.append(y)   #yの値はリスト v に逐次追加する
        w.append(s)   #sの値はリスト w に逐次追加する
        s = s + ds
        i = i + 1
# main
u = [0.1]   #xの初期値
v = [0.0]   #yの初期値
w = [0.0]   #sの初期値
n = 10000   #繰り返し回数
van_der_pol(n)
# graphic
from matplotlib import pyplot
X = u #位相平面記述のためにX軸に変位xを記述
Y = v#位相平面記述のためにY軸に速度yを記述
pyplot.scatter(X,Y, c='b', s=1, label='Van_der_Pol_Oscillation')
pyplot.legend(['position'])
pyplot.title("Van_der_Pol_Oscillation")
pyplot.show()
#−−−−−−−Pythonプログラム終わり−−−−−−−
```

4. シミュレーション結果

グラフィック機能を使用するためには matplotlibというライブラリが必要で，そのためにはAnacondaと呼ばれる統合環境を用いる．AnacondaにはJupyterNotebookというツールがあり,それを用いてプログラムを記述して実行させるがその段取りは先の報告[1]に記した．

図1は $\mu=0.1$の時の変位波形である．縦軸に変位(x), 横軸に時間(s)を取り，初期値をx=0.01, y=0 として描いている． 最初に指数関数的に振幅が増大し， xが1を超えると振幅の増大が減少し，振幅xの値が2に近づくと飽和・収束する．

図2は図1と同じ条件で，縦軸を速度,横軸に変位を取った位相平面上の解軌跡（トラジェクトリ）である .原点付近を初期値とし，螺旋を描きながらスパイラルが拡大し，振幅が2に近づくと楕円に収束する様子が分かる .このように時間を経てトラジェクトリが閉じた形状に収束する場合の図形をリミットサイクルと呼ぶ．

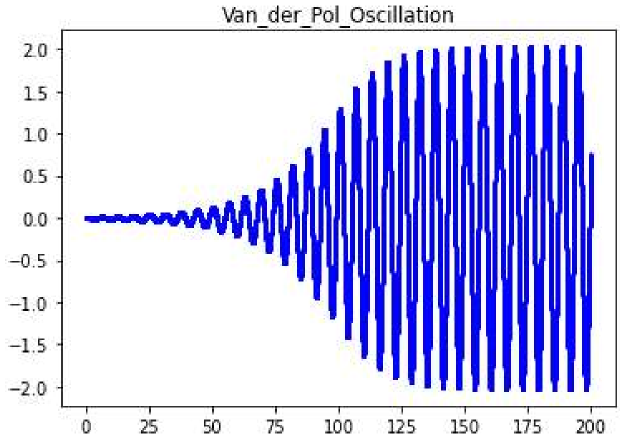

図1 $\mu=0.1$における変位xの表示

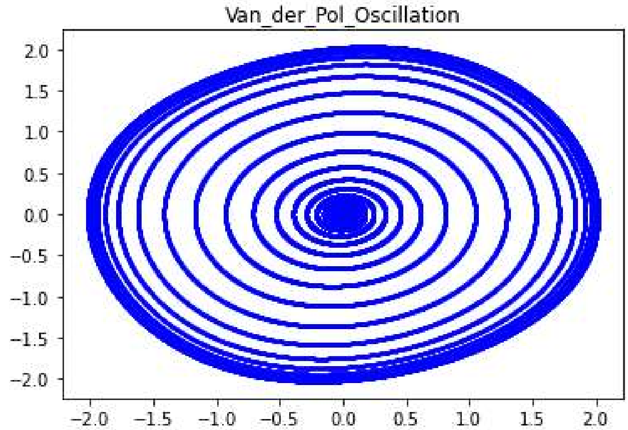

図2 $\mu=0.1$における位相平面トラジェクトリ

図3は $\mu=1$の場合のリミットサイクルである．この形状は，ファン・デル・ポール方程式についての多くの解説で引用されるので，ご存じの方も多いと思われる．

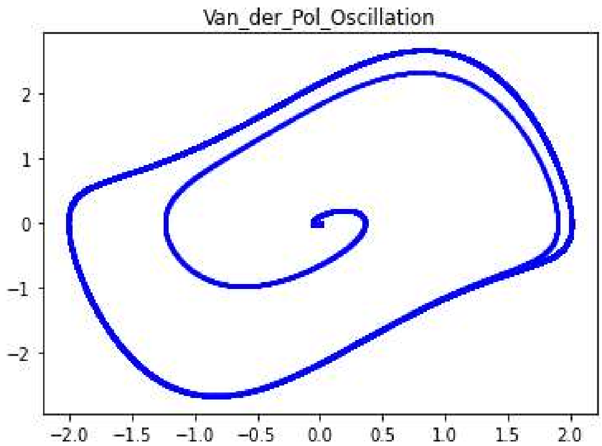

図3 $\mu=1$における位相平面トラジェクトリ

図2のμ=0.1の場合に比べるとリミットサイクルの形状が角ばっているだけでなく,一部がくびれかかった瓢箪型になることが観察される.同時にリミットサイクルに到達する時間も無次元化された時間で20程度に短縮される.

リミットサイクルの形状が角ばって瓢箪型になる状況は 時間に対する変位波形（図4）と時間に対する速度波形（図5）との相違にも反映される.すなわち変位波形がやや歪んだ正弦波的なのに対して速度波形の方がパルス的になっている状況が観察される.波形の振幅に注目すると,変位に関しては2程度

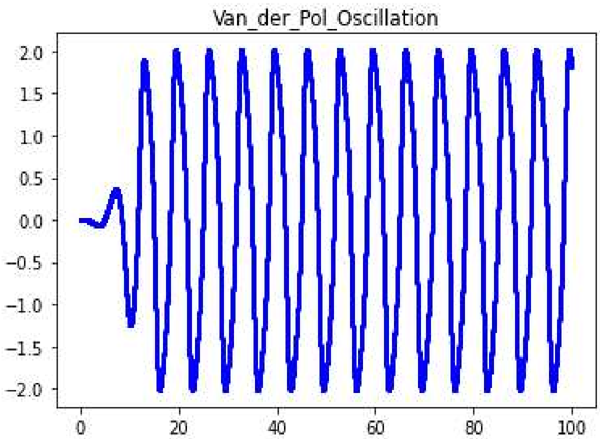

図4　μ=1における変位波形

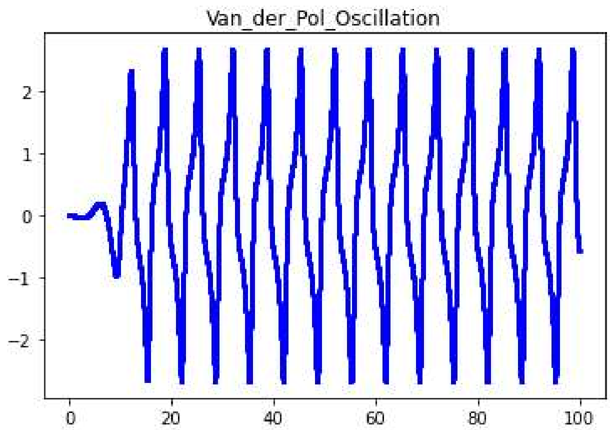

図5　μ=1における速度波形

で一貫して変わらないのに対して，速度の方はμ =1の場合には2を上回り, 3に近い値になっている. パルス的になるので振幅のピーク値が高くなることに注意する必要がある .

図6はμの値が10の場合の位相平面図である. μの増加に対して瓢箪型のくびれ形状が著しくなると共に， 速度の振幅が著しく増大する. μが10の場合の変位波形（図7）と速度波形（図8）を示すが， 変位が矩形波的になるのに対して速度がパルス的になる. 速度は変位の時間微分なので, 矩形波の微分がパルスになるのは常識的に理解できる .

μの増大に伴い振動の波長が増大する． 図4のμ =1の場合の波数は14程度であるが 図7のμ =10の場合の波数は5程度で半分以下になる． これは間歇動作的になるために振動現象が

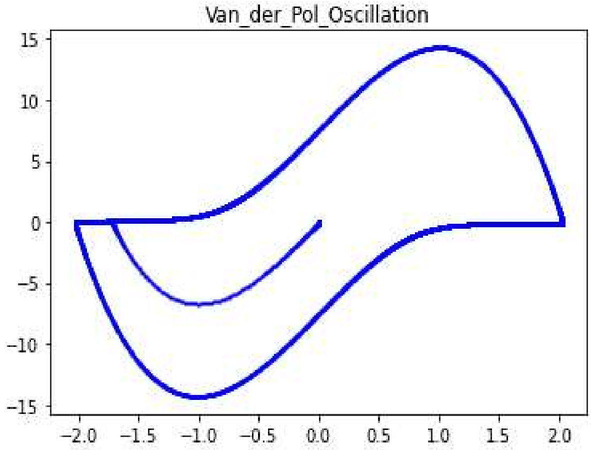

図6　μ=10における位相平面トラジェクトリ

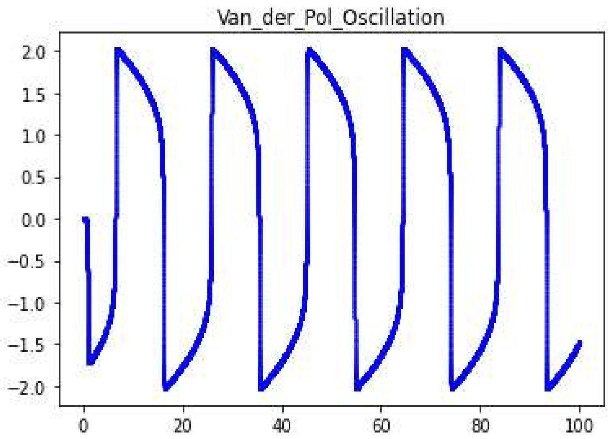

図7　μ=10における変位の表示画面

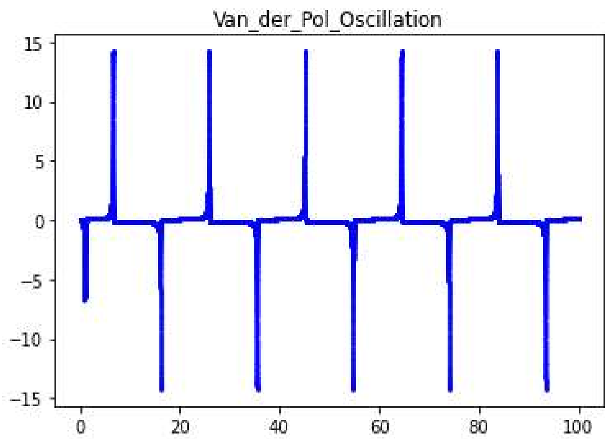

図8　μ=10における速度の表示画面

緩慢になり, 波数すなわち振動数が減少するのである . 粘性項という物理的な意味を考えると，μが小さい場合は 固有振動を形成する質量とばね定数が振動数の主要因となるが， μが大きくなると粘性項が主要因となり ,それが速度を低下させることにより振動数を減少させると考えれば良い .

5. 考察

5.1 繰り返し現象のモデル化

以上， 自励振動の最も単純なモデルとしてのファン・デル・ポール方程式を，Pythonによりシミュレーションを行い，μの値の増大により正弦波的な波形から,間歇動作的な波形に移行する様子を示した． 正弦波的な現象は電子的な正弦波発信回路に対応し,間歇的な現象は矩形波や鋸歯状波の生成に対応する. これらの回路を分析し, 等価回路を用いて簡略化すると, ファン・デル・ポール方程式で近似される場合が多い .

このような周期現象は自然現象でも社会現象でも頻繁に観察される. 例えば, 鹿威し（ししおどし）という古典的な日本庭園の装置がある.これはシーソーの原理の機構に支えられた竹筒の片方に, 水が注がれて貯められ, その重みで竹筒が落下動作すると, 貯められた水が流出して軽くなり, トーンという音を立てて元に戻るような簡単な仕組みの装置である .この音に驚いて鹿が退散するという目論見のコンパクトで素朴なメカニズムである.

このような機構が, 良く知られた間歇動作の典型であるが, そのメカニズム解明はいくつかのステップを要すると考えられがちだが,ファン・デル・ポール方程式のような二階の非線形微分方程式でエレガントにモデル化できるのは興味深い .

5.2 状態空間シミュレーションとカオス

状態空間における非線形シミュレーションの手法は数式を誘導して解く手法に比べると分かりやすく実践的であるが , 要因が増加すると特殊解事例の羅列となり一般的な結論を導くのが困難になる.

そのために要因を多様に分析する手法が模索された． その手法を検討した「非線形力学とカオス」とう書籍がある [4]. ここでは多様な状態空間における非線形シミュレーションのトラジェクトリ群が紹介され分類されている． だがそれを体系付けることは困難で文字通りカオスという用語で総括されている.そうは言っても状態が定常的な解に収束する「アトラクタ」や， 収束する方向の境界値や臨界値を意味する「分岐」と言った概念が導入され新たな模索が行われている .「非線形力学とカオス」の原書[5]が出版されたのが1986年で, 訳書が出版されたのが1988なので, 40年近い年月を経ている. 従ってすでに古典の範疇に入るのであるが， 状態空間における非線形シミュレーションの手法が豊かな可能性を秘めていることを物語る.

6. 今後の課題

デジタルミュージアムやデジタル人文学の分野の今後の発展のためには, コンテツをデータ科学や生成AIのようなコンピュータ科学的なアプローチで検討する必要がある .その観点で,プログラミングを通じた分析やシミュレーションが有効であり，現状ではPythonがそのための共通言語として優れていると思う.

今回取り上げたの非線形自励振動は ,物理現象としては摩擦振動,電気回路にけるアーク放電,航空機のフラッター,流体力学におけるウォータハンマーなどの解析に用いられた経緯があり，この解析手法をPythonを通じてさらに実践的に検討する手法を紹介したいと考える .

さらに, 人文学分野への数理モデルの適用と言う観点から , 経済学分野における ,景気変動や経済成長といった現象のモデル化[6]，細菌や動物の繁殖や衰退といった個体群・生態学モデル[7]への適用も視野に入れることが可能である .

7. おわりに

以上ファン・デル・ポール方程式に基づき , 自励振動, 間歇現象などをモデル化し， 自然現象や社会現象を状態空間を通じて把握する手法にPythonを活用する方法を紹介し， 考察した.

微分方程式で記述される系を状態空間のトラジェクトリで把握する手法は興味深いのであるが， 物理系のカオスや経済分野の生産関数のような複雑な世界では却って混乱が生じるようにも感じられる.

従って主要因を抽出して単純なモデルであるファン・デル・ポール方程式や，レイリーの式[8]，ボルテラの式[9]等に帰着させるようなセンスが重要であろう .

デジタルミュージアムのコンテンツでシミュレーションを活用するような展示が期待されるが， デジタルキュレータとしての学芸員の人にはそのようなスキルが期待される． このスキルは単にコンテンツ技術という視点だけでなく， 放課後型博物館的な運営を通じたコミュニティーの活性化にも貢献していただきたいと考える .

文献

[1] 大野邦夫, “微分方程式で記述される系のPythonによるシミュレーション～事例としての減衰振動モデルによる位相平面解析”, 画像電子学会 第309回研究会講演論文, Jun. 2024

[2] 大野邦夫, ”Webサービスにおける仮想ミュージアムへの考察～物語性とキュレーションの観点から～”,画像電子学会第1回デジタルミュージアム・人文学研究会資料, Mar. 2021

[3] 大野邦夫, 梶原俊男,, ”地磁気逆転地層理解に関するバーチャルミュージアムの検討”,2018年度画像電子学会年次大会講演論文, Jun. 2018

[4] J.M.T. Thompson, H.B. Stewart（武者利光, 橋口住久訳）, “非線形力学とカオス～技術者・科学者のための幾何学的手法”, オーム社, 1988

[5] J.M.T. Thompson, H.B. Stewart, “Nonlinear Dynamics and Chaos～Geometrical Methods for Engineers and Scientists”, John Wiley & Sons Ltd., 1986

[6] 弘岡正明, “技術革新と経済発展 – 非線形ダイナミズムの解明”, 日本経済新聞社, 2003

[7] レン・フィッシャー（松浦俊輔訳）, “群れはなぜ同じ方向を目指すのか？ – 群知能と意思決定の科学”, 白揚社, 2012

[8] ボゴリューボフ, ミトロポリスキー, “非線形振動論 – 漸近的方法”, 共立出版, 1961

[9] 橋本洋志, 牧野浩二, “Python コンピュータシミュレーション入門～人文・自然・社会科学の数理モデル”, オーム社, 2021